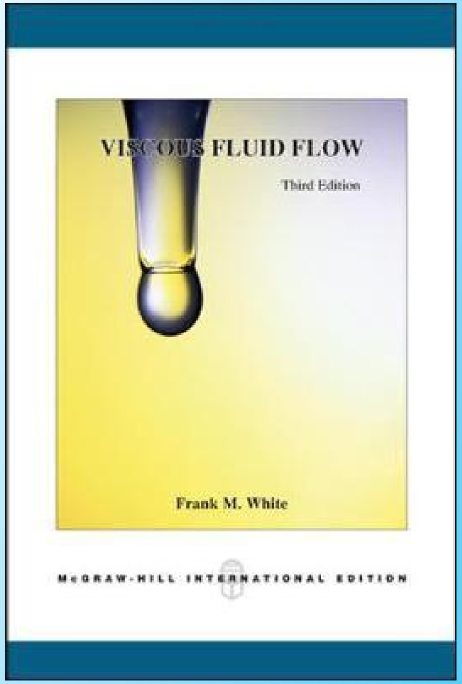
مکانیک سیالات پیشرفته



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش سوم از مباحث فصل دوم:
مباحث تکمیلی در خصوص معادلات ناویر–استوکس

کلاس درس دکتر نوروزی
اردیبهشت ۱۴۰۰

نکاتی در خصوص معادلات ناویر–استوکس

۱- ماهیت ترمهای بخش مومنتوم این معادله به شرح زیر است:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Rate of Change}} + \underbrace{\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}}_{\text{Advection}}}_{\text{Inertia}} = \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{Body Force}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\text{Pressure Gradient}} + \underbrace{\nu\nabla^2\mathbf{V}}_{\text{Diffusion}}$$

۲- معادلات ناویراستوکس غیرخطی هستند. این غیر خطی بودن از ترمهای انتقال (Advection) معادله مومنتوم ناشی شده است.

۳- در حالت کلی این معادلات فاقد حل صریح تحلیلی جامع هستند و حلهای تحلیلی موجود صرفا برای حالتهای بسیار ساده شده این معادله ارائه شده اند. جوایز ریاضی برای آنالیز این معادله در نظر گرفته شده است. برای نمونه به لینکهای زیر مراجعه کنید:

https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

http://theconversation.com/millennium-prize-the-navier-stokes-existence-and-uniqueness-problem-4244

۴- به دلیل وجود ترم مشتق زمانی و نیز ترمهای غیرخطی، حل عددی این معادله به ازای مقادیر بزرگ نیروی اینرسی (اعداد رینولدز بزرگ) دچار ناپایداری و واگرایی می شود. ضمنا وجود این ترمها برای توصیف جریانهای دارای فیزیک ناپایدار و آشفته ضروری است.

۵- یکی از روشهای رایج برای تحلیل جریانهای آشفته استفاده از فرم متوسط گیری شده زمانی معادلات ناویر-استوکس است.

شکل بی بعد معادلات ناویر–استوکس

استفاده از شکل بی بعد معادلات ناویر-استوکس در مکانیک سیالات بسیار رایج است. چنانچه یک جریان دارای یک طول مرجع L و سرعت مرجع U باشد، در اینصورت پارامترهای جریان را می توان به شکل زیر بی بعد کرد:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}/U \qquad x^* = x/L \qquad y^* = y/L \qquad z^* = z/L$$
$$\nabla^* = L\nabla \qquad t^* = tU/L \qquad p^* = (p - p_0)/(\rho U^2) \tag{۱}$$

با توجه به روابط (۱) می توان نوشت:

$$\mathbf{V} = U\mathbf{V}^* \qquad x = Lx^* \qquad y = Ly^* \qquad z = Lz^*$$
$$\nabla = \nabla^*/L \qquad t = t^*L/U \qquad p = p_0 + p^*\rho U^2 \tag{۲}$$

با توجه به رابطه (۲)، برای شکل بی بعد معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(Uv^*)}{\partial(Ly^*)} + \frac{\partial(Uw^*)}{\partial(Lz^*)} = 0$$
$$\frac{U}{L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{۳}$$

شکل بی بعد معادلات مومنتوم: در خصوص بی بعد سازی معادلات مومنتوم، از معادله مومنتوم در جهت x و با صرفنظر از اثرات گرانش شروع می کنیم:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(t^*L/U)}+(Uu^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)}+(Uv^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Ly^*)}+(Uw^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lz^*)}\right)=$$
$$-\frac{\partial(p_0+p^*\rho U^2)}{\partial(Lx^*)}+\mu\left(\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lx^*)^2}+\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Ly^*)^2}+\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lz^*)^2}\right), \quad (۴)$$

$$\frac{\rho U^2}{L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

با تقسیم کردن عبارت قرمز رنگ فوق به $\frac{\rho U^2}{L}$ داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\frac{\rho UL}{\mu}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \quad (۵)$$

شکل بی بعد معادلات ناویر–استوکس

عبارت آبی رنگ موجود در رابطه (۵) همان عدد رینولدز است ($\mathrm{Re} = \rho UL/\mu$). بنابراین برای معادله بی بعد مومنتوم در جهت x داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \qquad (۶)$$

بطور مشابه برای معادلات مومنتوم بی بعد در جهات y و z داریم:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}\right) \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) \qquad (۸)$$

در نهایت از معادلات (۳)، (۶)، (۷) و (۸) فرم بسته معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0$$

$$\frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{V}^* \qquad (۹)$$

صورت بی بعد معادلات بقا جریان تراکم پذیر

برای جریان تراکم پذیر و انتقال حرارت مربوط به آن می توان از پارامترهای زیر جهت بی بعدسازی استفاده نمود.

$$x_i^* = \frac{x_i}{L} \qquad t^* = \frac{tU}{L} \qquad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{U} \qquad p^* = \frac{p - p_0}{\rho U^2} \qquad \Phi^* = \frac{L^2}{\mu_0 U^2}\Phi$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad T^* = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \qquad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad k^* = \frac{k}{k_0} \qquad \nabla^* = L\nabla \tag{۱۰}$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد فوق، صورت بی بعد معادلات ناویر-استوکس و انتقال حرارت بصورت زیر است:

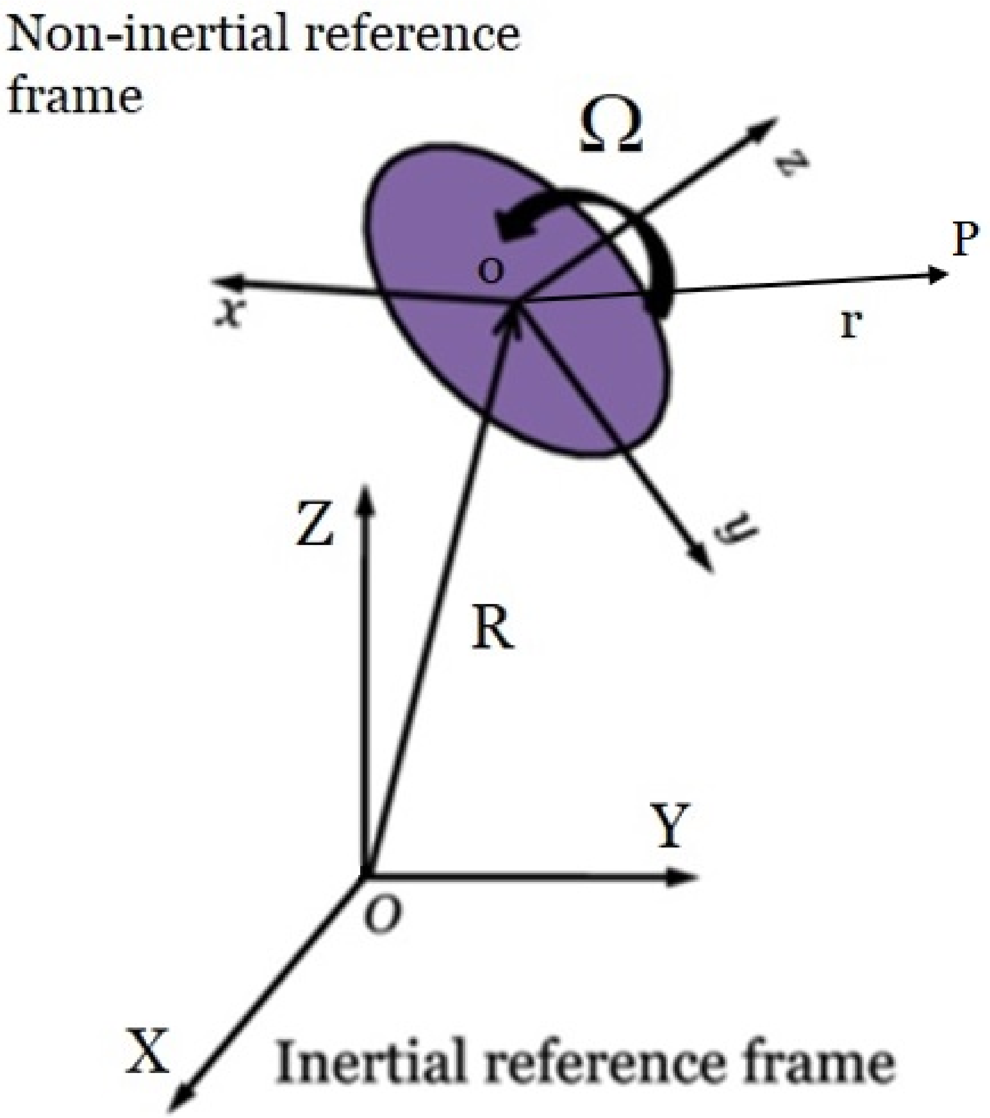
$$\text{Continuity:} \qquad \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0$$

$$\text{Navier–Stokes:} \ \rho^* \frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = \frac{1}{Fr}\rho^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\nabla^* \cdot \left[\mu^*\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)\right] \tag{۱۱}$$

$$\text{Energy:} \qquad \rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} = Ec\frac{Dp^*}{Dt^*} + \frac{1}{RePr}\nabla^* \cdot (k^* \ \nabla^* T^*) + \frac{Ec}{Re}\Phi^*$$

در رابطه فوق، Φ تلفات ویسکوز، Re عدد رینولدز، Fr عدد فرود، Pr عدد پرانتل، Ec عدد اکرت است:

$$Re = \frac{\rho_0 UL}{\mu_0} \qquad Fr = \frac{U^2}{gL} \qquad Pr = \frac{\mu_0 c_p}{k_0} \qquad Ec = \frac{U^2}{c_p T_0} \tag{۱۲}$$



معادلات ناویر-استوکس در دستگاه های غیر اینرسی

در بعضی از مسائل مکانیک سیالات بویژه مسائل دارای فریمهای متحرک، استفاده از دستگاههای مختصات غیراینرسی می تواند سبب آسانتر شدن تحلیل جریان شود. مطابق شکل، **XYZ** یک دستگاه مختصات اینرسی و **xyz** یک دستگاه مختصات غیراینرسی است. در اینصورت برای معادله بقای مومنتوم می توان نوشت:

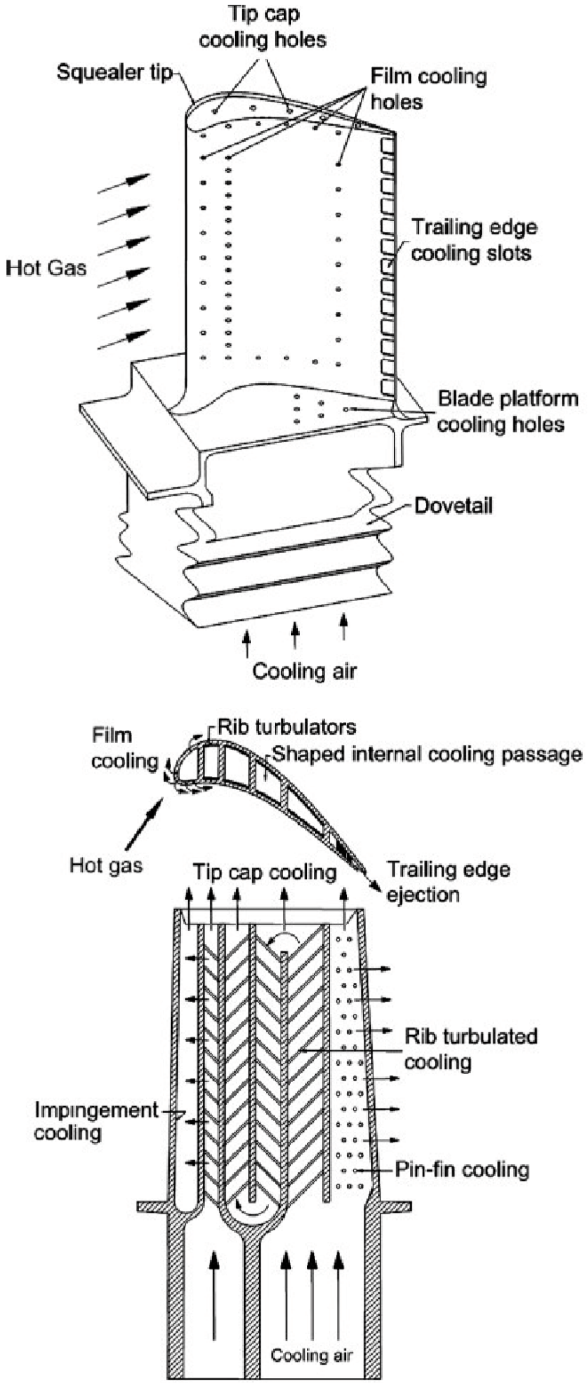
$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}+\mathbf{a}_{rel}=\mathbf{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (۱۳)$$

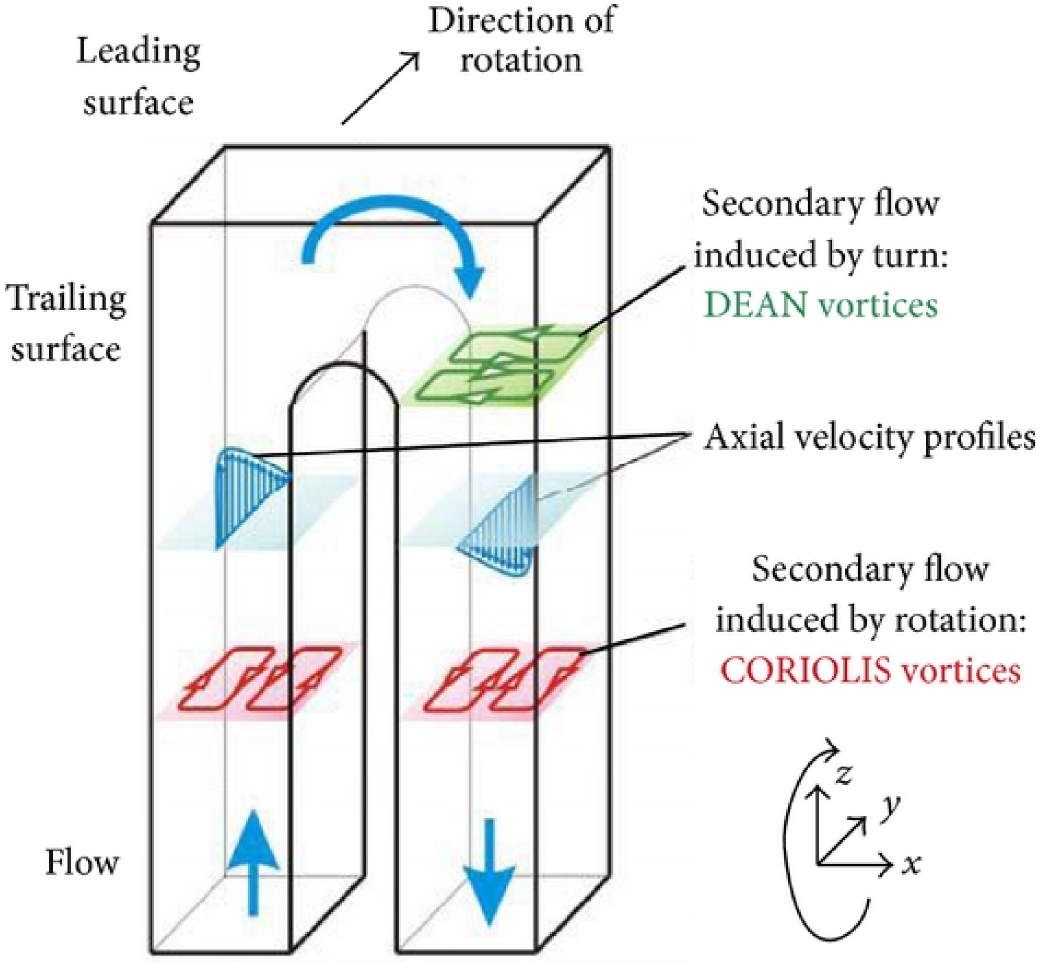
در رابطه فوق، $\mathbf{V}$ بردار سرعت از دید دستگاه مختصات غیراینرسی و $\mathbf{a}_{rel}$ شتاب نسبی دستگاه مختصات غیراینرسی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است:

$$\mathbf{a}_{rel}=\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}+\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\mathbf{\Omega}\times\left(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}\right)+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} \qquad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴)، $\mathbf{\Omega}$ سرعت زاویه ای چرخش دستگاه مختصات غیراینرسی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی، $\mathbf{R}$ بردار موقعیت مبدا دستگاه مختصات غیراینرسی نسبت به مبدا دستگاه اینرسی و $\mathbf{r}$ بردار موقعیت هر نقطه از جریان (مثل **P**) از دید دستگاه مختصات غیراینرسی است.

نمونه استفاده از دستگاه غیر اینرسی:
جریان خنک داخلی پره های توربین گازی





بعضی پارامترهای مهم در آشکارسازی و آنالیز جریان

خط جریان (Streamline): مکان هندسی نقاطی است که بردارهای سرعت جریان بر آن مماس هستند.

خط مسیر (Pathline): یک خط مسیر، مسیر واقعی طی شده توسط یک ذره سیال است.

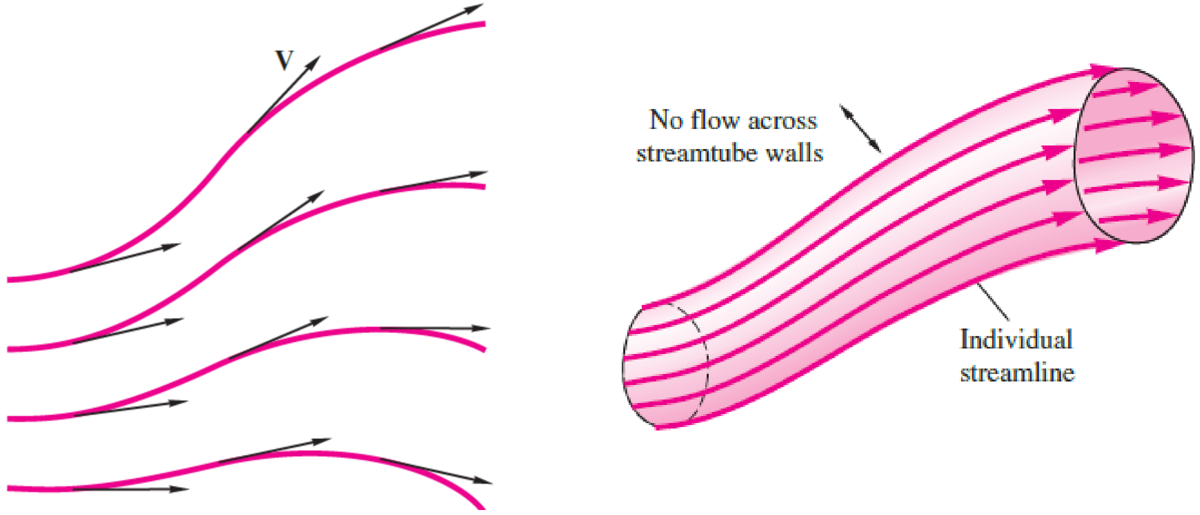
خط رگه (Streakline): مکان هندسی ذراتی است که پیشتر از یک نقطه مشخص (مانند محل تزریقشان) عبور کرده اند.

خط زمانی (Timeline): مجموعه ذرات سیال است که یک خط را در یک لحظه مشخص تشکیل می دهند

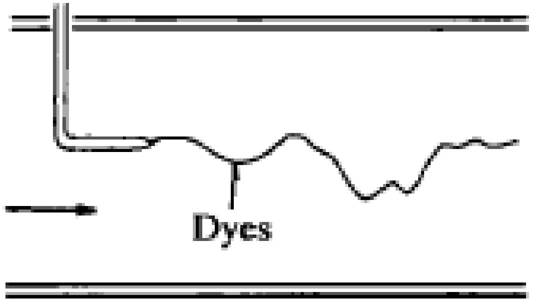
نکته ۱: خط جریان بیشتر در مطالعات تحلیلی و عددی مورد استفاده قرار می گیرد اما سایر خطوط فوق الذکر معمولا در کارهای ازمایشگاهی استفاده می شوند. در جریانهای دائمی، خط جریان، خط مسیر و خط رگه بر هم منطبق هستند.

نکته ۲: در جریانهای غیرلزج، روی خطوط جریان معادله برنولی برقرار است.

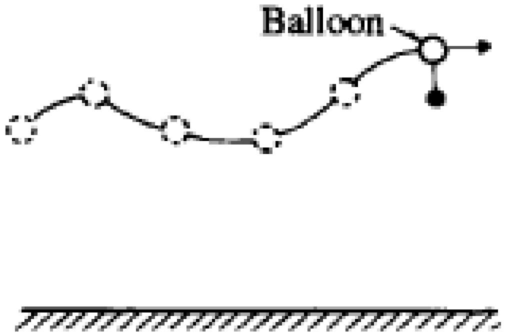
نکته ۳: دبی گذرا در راستای عمود بر خطوط جریان صفر است.



(a) Streamline



(b) Streak line



(c) Path line

تابع جریان (Stream Function)

چنانچه $d\mathbf{r}$ بردار جابجایی در راستای خط جریان باشد، بنابراین از شکل زیر نتیجه می شود:

$$\text{Along Streamline:} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{|d\mathbf{r}|}{|\mathbf{V}|} \tag{۱۵}$$

و لذا برای جریان دو بعدی در صفحه xy داریم:

$$\text{Along Streamline:} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \rightarrow \quad udy - vdx = 0 \tag{۱۶}$$

تابع جریان، یک تابع اسکالر است که برای **جریانهای تراکم ناپذیر دوبعدی** تعریف می شود به نحوی که مقدار این تابع روی هر خط جریان عددی ثابت است. از آنجا که مقدار تابع جریان روی خط جریان ثابت است، بنابراین در امتداد خط جریان داریم:

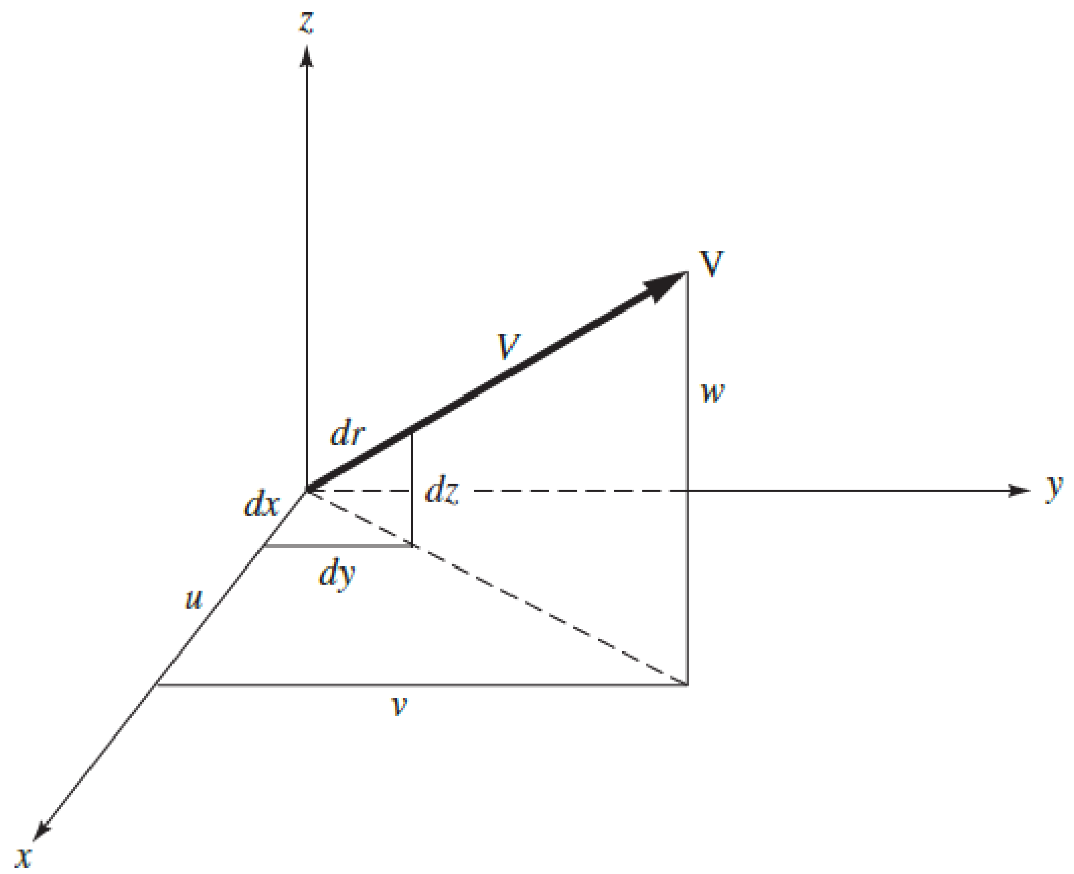
$$\text{Along Streamline:} \quad d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \tag{۱۷}$$

با مقایسه روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می شود:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۱۸}$$

می توان دریافت که اختلاف تابع جریان دو خط جریان، معرف دبی گذرا از بین آنها است و همچنین به سادگی می توان نشان داد که تابع جریان همواره معادله پیوستگی را ارضا می کند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \tag{۱۹}$$



نکته: در سایر دستگاههای مختصات متعامد دو بعدی امکان تعریف تابع جریان وجود دارد.

معادله ورتیسیته دوبعدی:

معادلات مومنتوم جریان تراکم ناپذیر دو بعدی را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (۲۰)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (۲۱)$$

چنانچه از معادله (۲۰) نسبت به y و از معادله (۲۱) نسبت به x مشتق بگیریم و حاصل آنها را از یکدیگر کم کنیم در اینصورت فشار حذف خواهد شد. می توان نشان داد که عبارت حاصل برابر است با:

$$\frac{D\omega_z}{Dt}=\nu\nabla^2\omega_z \qquad (۲۲)$$

که در رابطه فوق، ω_z ورتیسیتی در جهت z است و رابطه ان با تابع جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \rightarrow \omega_z=-\nabla^2\psi \qquad (۲۳)$$

تمرین: معادله (۲۲) را اثبات کنید.

شکل باز معادله (۲۲)، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right) \tag{۲۴}$$

با قرار دادن معادله (۲۳) در معادله (۲۴) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = \nu\nabla^4\psi \tag{۲۵}$$

معادله فوق، یک معادله با یک مجهول (تابع جریان) است. لازم است تا یادآوری شود که تابع جریان معادله پیوستگی را بصورت اتوماتیک ارضا می کند، لذا با استفاده از تابع جریان نیازی به حل معادله پیوستگی نیست. با حل معادله (۲۵) می توان تابع جریانهای دوبعدی تراکم ناپذیر را بدست آورد. از هر دو روش تحلیلی و عددی برای حل این معادله استفاده می شود. شایان ذکر است که در نهایت پس از تعیین تابع جریان، می توان از رابطه (۱۸) مولفه های سرعت را بدست آورد. همچنین با درج مولفه های سرعت بدست آمده در معادلات مومنتوم، فشار مشخص می شود. یکی از دشواریها در بکارگیری معادله (۲۵) مرتبه بالای آن است که تا حدی سبب کاهش پایداری حلهای عددی می شود و نیز این روش نیازمند اعمال شرط های متعدد روی مرزها است.

جریان خزشی: جریانهایی که عدد رینولدز آنها بسیار کوچکتر است $(\mathrm{Re} \ll 1)$، جریان خزشی نامیده می شوند.

در جریانهای خزشی نیروهای ویسکوز غالب بوده و اینرسی جریان قابل صرفنظر است. بنابراین از رابطه (۲۵)، نتیجه می شود:

$$\nabla^4\psi = 0 \tag{۲۶}$$

معادله (۲۶)، معادله Biharmonic نامیده می شود و خوشبختانه دارای حلهای متعدد تحلیلی است.

معادله ورتیسیته سه بعدی:

می توان نشان داد که با کرل گرفتن از معادلات مومنتوم در حالت سه بعدی، معادله ورتیسیته سه بعدی بدست می آید:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{۲۷}$$

معادله فوق از ترمهایی به شرح زیر تشکیل شده است:

$$\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}}_{\text{Rate of change}}+\underbrace{\mathbf{V}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}}_{\text{Vortex Transport}}=\underbrace{(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{V}}_{\text{Vortex Stretching}}+\underbrace{\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}}_{\text{Vortex Diffusion}} \tag{۲۸}$$

ترم کشش گردابه (Vortex Stretching) در جریانهای دو بعدی وجود ندارد (معادله (۲۲) را ببینید). این ترم توصیف کننده مکانیزم اصلی تبدیل ادیهای بزرگ به ادیهای کوچک در جریانهای آشفته است.

در جریانهای ایده آل (غیرلزج) در هیدرودینامیک، چندین قضیه بر اساس رابطه (۲۸) استخراج شده است. در این جریانها به دلیل فقدان ویسکوزیته از ترم نفوذ (Diffusion) صرفنظر می شود. مطابق قضیه هلمهوتز قدرت یک ورتکس در جریان ایده آل همواره ثابت می ماند و مطابق قضیه لاگرانژ اگر در یک جریان ایده آل مقدار ورتیسیته در همه جا در لحظه آغازین (t=0) برابر صفر باشد، در اینصورت مقدار ورتیسیته در سایر زمانها نیز صفر خواهد بود. همچنین قضیه کلوین بیان می کند که سیرکولاسیون حول هر مسیر بسته که با جریان حرکت می کند مقداری ثابت است. مجددا تکرار می شود که قضایای فوق تنها در جریانهای غیرلزج صادق هستند. همچنین سیرکولاسیون حول هر مسیر بسته نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Gamma=\oint_C \mathbf{V}.d\mathbf{l} \tag{۲۹}$$

در رابطه فوق، $d\mathbf{l}$ بردار دیفرانسیل طول در مسیر بسته C است.

جریانهای ایده آل و معادله اویلر

چنانچه در معادلات ناویر استوکس از اثرات ویسکوزیته صرفنظر شود در اینصورت معادلات اویلر برای جریان ایده آل (جریان غیر لزج) بدست می آید که معادله اساسی در هیدرودینامیک این جریانها محسوب می شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \qquad (۳۰)$$

جریانهای غیر چرخشی و غیر ویسکوز

جریانهای غیر چرخشی و غیر ویسکوز که به جریانهای پتانسیل نیز معروف هستند، اصولا برای تحلیل جریان در خارج لایه مرزی مورد استفاده قرار می گیرند و دارای ویژگی های زیر می باشند:

۱- میدان سرعت این جریانها دارای یک تابع پتانسیل است: $\mathbf{V} = \nabla \phi \;\rightarrow\; u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\; v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \;\&\; w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

۲- تابع پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می کند: $\nabla^2 \phi = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$

۳- میدان پتانسیل خطی بوده و اصل جمع آثار در آن صادق است: $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \ldots$

۴- معادله برنولی در این میدان جریان صدق می کند: $\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = cte$

۵- در این جریان شرط عدم لغزش روی سطوح جامد برقرار نیست و فقط مولفه نرمال سرعت روی سطح صفر است.

نکاتی در خصوص معادله برنولی:

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=cte$$

می توان نشان داد که در جریانهای غیر ویسکوز، **معادله برنولی** برقرار است، اگر داشته باشیم: $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}).d\mathbf{r}=0$

در رابطه فوق، $d\mathbf{r}$ معرف دیفرانسیل جابجایی است. برای صفر بودن عبارت $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}).d\mathbf{r}$ می تواند حالات زیر برقرار باشد:

۱- سیال فاقد سرعت باشد ($\mathbf{V}=0$). در این حالت با یک مساله هیدرواستاتیک روبرو هستیم (فصل دوم کتاب وایت).

۲- جریان غیرچرخشی باشد ($\boldsymbol{\omega}=0$). در این حالت با یک جریان پتانسیل روبرو هستیم (فصل هشتم کتاب وایت).

۳- $d\mathbf{r}$ بر $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V})$ عمود باشد که این حالت بسیار خاص و نادر خواهد بود (چندان کاربردی ندارد).

۴- $d\mathbf{r}$ موازی سرعت $\mathbf{V}$ باشد. این حالت معرف حرکت بر روی خطوط جریان است (بیاد آورید که میدان سرعت بر خطوط جریان مماس است). بنابراین روی خطوط جریان معادله برنولی برقرار است.


The End